МАТЕРИАЛЫ по МАТЕМАТИКЕ для ПОДГОТОВКИ к ЕГЭ

— ∗ — ∗ — ∗ —

Тема 1.2. Преобразование тригонометрических выражений. (Базовый и повышенный уровни сложности)

А.Х. Назиев

© А.Х. Назиев

Содержание

I Основные сведения 4

1 Тригонометрические функции 5
1.1 Определения основных тригонометрических функций 5
1.2 Знаки значений тригонометрических функций 7
1.3 Избранные значения тригонометрических функций 7

2 Основные тригонометрические формулы 8
2.1 Основное тригонометрическое тождество 8
2.2 Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента 8
2.3 Формулы сложения 9
2.4 Формулы удвоения и утроения аргумента 10
2.5 Формулы понижения степени 10
2.6 Формулы раздвоения аргумента 11
2.7 Формулы преобразования произведений в суммы 12
2.8 Формулы преобразования сумм в произведения 13
2.9 Формулы приведения 14
2.10 О владении формулами тригонометрии 14

Home Page
Титульная страница
Содержание
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Страница 3 из 34
Назад
Full Screen
Закрыть
Выход

II Примеры с решениями и тесты 17

3 Базовый уровень сложности 18
3.1 Примеры с решениями 18

4 Инструкции по выполнению тестов 20
4.1 Тесты 23
4.1.1 Тест с выбором ответа 23
4.1.2 Тест с записью краткого ответа 26

5 Повышенный уровень сложности 28
5.1 Примеры с решениями 28
5.2 Тесты с записью краткого ответа 32

Часть I
Основные сведения

1. Тригонометрические функции

1.1. Определения основных тригонометрических функций

Угол в 1 *радиан* — это угол, который высекает на окружности радиуса 1 с центром в вершине угла дугу, длина которой равна единице.

Для любого действительного числа α через P_α обозначается точка единичной окружности, получаемая из точки $P(0,1)$ поворотом: на угол α радиан против часовой стрелки, если $\alpha \geq 0$; на угол $-\alpha$ радиан по часовой стрелке, если $\alpha < 0$.

Определение 1.1.

Косинусом числа α	называется	абсцисса точки P_α,
синусом числа α	называется	ордината точки P_α,
тангенсом числа α	называется	отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,
котангенсом числа α	называется	отношение $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Определение 1.2.

Функция синус — это функция, определённая условием

$$y = \sin x,$$

функция косинус — это функция, определённая условием

$$y = \cos x,$$

функция тангенс — это функция, определённая условием

$$y = \operatorname{tg} x,$$

функция котангенс — это функция, определённая условием

$$y = \operatorname{ctg} x.$$

Области определения:

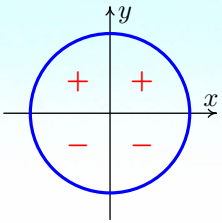
для функций косинус и синус — множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел,
для функции тангенс — множество всех действительных чисел x таких, что $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ при всех $k \in \mathbb{Z}$,
для функции котангенс — множество всех действительных чисел x таких, что $x \neq k\pi$ при всех $k \in \mathbb{Z}$.

Области значений:

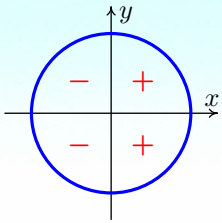
для функций косинус и синус — отрезок $[-1,\ 1]$,
для функций тангенс и котангенс — множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

1.2. Знаки значений тригонометрических функций

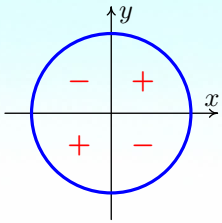
$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x$



1.3. Избранные значения тригонометрических функций

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
$\operatorname{ctg} x$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

2. Обзор основных формул тригонометрии

2.1. Основное тригонометрическое тождество

Для любого x

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

2.2. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

Для любого $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Для любого $x \neq k\pi$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Для любого $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\pi$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1.$$

Для любого $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Для любого $x \neq k\pi$

$$\operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

2.3. Формулы сложения

Для любых α, β

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;\\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}$$

Для любых α и β, если $\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, то

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + tg\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

а если $\alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, то

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - tg\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

2.4. Формулы удвоения и утроения аргумента

Для любого α

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha;\\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\
&= 2\cos^2\alpha - 1\\
&= 1 - 2\sin^2\alpha;\\
\sin 3\alpha &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;\\
\cos 3\alpha &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;
\end{aligned}$$

Если $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Если $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

2.5. Формулы понижения степени

Для любого α

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2};$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

Если $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, то

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.$$

Если $\alpha \neq k\pi$, то

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}.$$

2.6. Формулы раздвоения аргумента

Для любого α

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad \text{так что} \quad \left|\sin \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}};$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \quad \text{так что} \quad \left|\cos \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

Если $\alpha \neq (2k+1)\pi$, то

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \text{так что} \quad \left|\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

Если $\alpha \neq 2k\pi$, то

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad \text{так что} \quad \left|\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}.$$

Для тангенса и котангенса половинного аргумента имеются ещё и другие формулы, не содержащие радикалов.

Если $\alpha \neq (2k+1)\pi$, то

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Если $\alpha \neq 2k\pi$, то

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

2.7. Формулы преобразования произведений в суммы

Для любых α и β

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right];$$

$$\cos\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\right].$$

Home Page
Титульная страница
Содержание
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Страница 13 из 34
Назад
Full Screen
Закрыть
Выход

2.8. Формулы преобразования сумм в произведения

Для любых α и β

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

2.9. Формулы приведения

Формулами приведения называют соотношения, позволяющие выражать значения тригонометрических функций $\sin$, $\cos$, tg, ctg в точках $\alpha \pm n\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, через их значения в точке α. При этом, в силу того, что 2π является периодом для каждой из указанных функций, достаточно ограничиться значениями $n = 1,\ 2,\ 3$. Эти формулы мы представим в виде следующей таблицы.

x	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

2.10. О владении формулами тригонометрии

При изучении тригонометрии многих затрудняет необходимость запоминать большое количество формул. Для облегчения этой задачи нужно, прежде всего, самостоятельно вывести все необходимые формулы из основных — формул косинуса и синуса суммы и разности. После этого каждый раз, когда надо воспользоваться той или иной формулой, нужно не торопиться заглядывать в пособие, а постараться сначала представить себе, как может быть получена нужная формула,

прикинуть в уме, как она устроена, и лишь после этого заглянуть в пособие и проверить себя.

Очень важно уметь читать формулы не только слева направо, но и справа налево. Например, нужно уметь не только разворачивать $\cos(\alpha+\beta)$ в $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, но и сворачивать второе из этих выражений в первое; в выражении $\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta$ нужно узнавать $\sin(\beta-\alpha)$ (а не $\sin(\alpha-\beta)$) и т.д.

Нужно учиться узнавать во встречающихся тригонометрических выражениях частные случаи левых и правых частей основных формул. Скажем, в

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$$

нужно видеть $\sin(x+\frac{\pi}{6})$, в $\sin x+\cos x$ узнавать

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right),$$

т.е. $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$, и т.д.

Но самое главное — это уметь *применять* формулы. Для этого очень важно понять, что в большинстве случаев встречающиеся выражения бывают «не готовы» для применения известных формул, их ещё нужно к этому «подготавливать». Например, выражение $\sin x$ «не готово» для применения формулы синуса двойного угла, а после преобразования

$$\sin x=\sin 2\cdot\frac{x}{2}$$

получаем выражение, уже «готовое» для этого. Точно так же выражение $\cos 105^\circ$ «не готово» для применения формул приведения, но после преобразования

$$\cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ)$$

приходим к выражению, уже «готовому» для этого.

Часть II

Примеры с решениями и тесты

3. Базовый уровень сложности

3.1. Примеры с решениями

Пример 3.1. Найдите значение выражения $5\cos^2 x + 1$, если $\sin^2 x = 0,3$.

1) 2,5; 2) 5,55; 3) 4,5; 4) 7,5.

Решение. Применяя основное тригонометрическое тождество, получаем

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - 0,3 = 0,7.$$

Отсюда $5\cos^2 x + 1 = 5 \cdot 0,7 + 1 = 4,5$.

Ответ. 3.

Пример 3.2. Найдите значение дроби $F = \frac{\sin 32^\circ \cos 28^\circ + \cos 32^\circ \sin 28^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$.

1) $\sqrt{3}$; 2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 3) $2\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. Применяя формулу синуса суммы и синуса двойного угла, получаем

$$F = \frac{\sin(32^\circ + 28^\circ)}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{2\sin 60^\circ}{2\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{2\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}.$$

Ответ. 3.

Пример 3.3. Найдите значение выражения $A = \cos(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha\sin\beta$, если $\alpha = 42^\circ$, $\beta = 18^\circ$.

1) $-0,5$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $0,5$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Применяя формулу косинуса разности и косинуса суммы, получаем

$$\begin{aligned} A &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \\ &= \cos(\alpha+\beta) = \cos(42^\circ + 18^\circ) = \\ &= \cos 60^\circ = 0,5. \end{aligned}$$

Ответ. 3.

4. Инструкции по выполнению тестов

Приводимые ниже тесты делятся на тесты с выбором ответа и тесты с записью краткого ответа.

Чтобы приступить к выполнению теста, подведите указатель мыши к кнопке с надписью «Begin Quiz» и нажмите левую клавишу мыши. Закончив выполнение теста, подведите указатель мыши к кнопке с надписью «End Quiz» и нажмите левую клавишу мыши. В окошке справа после слова «Score» будет показан Ваш результат, например, «8 out of 9», что означает: «8 заданий из 9 выполнены правильно». Затем подведите указатель мыши к кнопке с надписью «Correct» и нажмите левую клавишу мыши. Дальнейшие действия зависят от вида выполненного теста.

Если это был тест с выбором ответа, компьютер пометит зелёной «галочкой» Ваши правильные ответы, пометит красным косым крестом Ваши неправильные ответы и пометит зелёным «яблоком» верные ответы (в тех заданиях, на которые Вы ответили неверно).

Если выполненный Вами тест был с записью краткого ответа, после нажатия на кнопку «Correct» компьютер оставит чёрными рамки, в которые Вы внесли неправильные ответы и выкрасит в зелёный цвет рамки, в которые были внесены правильные ответы. При этом рядом с каждой рамкой ответа появится кнопка с надписью «Ans», нажав на которую, Вы сможете увидеть правильный ответ в рамке, помеченной «Answers».

Отвечая на задание теста с записью краткого ответа, подведите ука-

Home Page
Титульная страница
Содержание
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Страница 21 из 34
Назад
Full Screen
Закрыть
Выход

затель мыши к рамке рядом с выполняемым заданием и нажмите левую клавишу мыши. В рамке начнёт мигать курсор и Вы сможете ввести полученный Вами ответ. Используйте при этом следующие обозначения.

- Используйте `*` для обозначения умножения: Пишите `4*x` вместо $4x$;
- Используйте `^` для обозначения степени: Пишите `4*x^3` вместо $4x^3$; `12*x^-6` вместо $12x^{-6}$.
- Заключайте в скобки аргументы вводимых функций ; например, пишите `sin(x)` вместо `sin x`.
- Используйте скобки для указания *границ* действия операций: Например, пишите `4*x*(x^2+1)^3` вместо $4x(x^2+1)^3$; `4^(2*x+1)` вместо 4^{2x+1}; `(sin(x))^2` вместо $(\sin(x))^2$. *НЕ* пишите `sin^2(x)`, пишите `(sin(x))^2`.
- Вы можете также пользоваться квадратными `[ ]` или фигурными `{ }` скобками для ограничения выражений.
- Функции, которые Вы можете использовать:
  - Тригонометрические: `sin`, `cos`, `tan` (тангенс), `cot` (котангенс);
  - Обратные тригонометрические: `asin`, `acos`, `atan` (арксинус, арккосинус, арктангенс;

- Логарифмические: `ln` (натуральный логарифм); например, `ln(x)`;
- Показательные: Показательная функция с основанием e, e^x, может быть введена как `exp(x)` или `e^x`.
- для обозначения модуля (абсолютного значения) используйте `abs(x)` или `|x|`.
- Прочие: `sqrt`, пишите `sqrt(x)` вместо $\sqrt{x}$ (или используйте «показательные» обозначения: `x^(1/2)`).

Важно: Вводя функции, используйте только те переменные, в которых сформулировано задание. Если в задании используется переменная x, пишите `x`; если в задании t, пишите `t`. Если Вы напишете `t` там, где от Вас ожидается `x`, ответ будет засчитан как неверный.

Важно: Используйте только Acrobat Reader (или, если он у Вас есть, Acrobat Pro) версии 5.0 или выше (последние версии называются Adobe Reader). НЕ используйте другие читалки pdf. Например, Foxit Reader умеет не всё, что умеет Acrobat Reader. Прочитать этот файл с помощью Foxit Reader Вы сможете, но протестироваться — нет.

4.1. Тесты

4.1.1. Тест с выбором ответа

1. Вычислите: $7\cos^2\alpha - 5 + 7\sin^2\alpha$.

(a) $1 + \cos^2\alpha$;
(c) -12;

2. Упростите выражение $\cos x + \operatorname{tg} x \cdot \sin x$.

(a) 1;
(c) $\cos x + \sin x$;

3. Упростите выражение $\cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

(a) $\cos 2x$; (b) $2\sin^2 x$;

4. Упростите выражение $-4\sin^2\alpha + 5 - 4\cos^2\alpha$.

(a) 1;
(c) $1 + 8\sin^2\alpha$;

5. Упростите выражение $\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha$.

(a) $\operatorname{ctg} 2\alpha$;
(c) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha$;

6. Упростите выражение $1 - \sin\alpha\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha$.

(a) 0; (b) $\sin^2\alpha$; (c) c

7. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{2\sqrt{7}}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$.

(a) $-\frac{3}{\sqrt{19}}$; (b) $-\frac{4}{\sqrt{19}}$;

8. Найдите значение выражения $14\sin^2 x - 3$, если $\cos^2 x = 0,7$.

(a) $-2,58$; (b) $1,2$; (c

9. Найдите значение выражения $4\cos^2 x + 2$, если $\sin^2 x = 0,6$.

(a) $4,56$; (b) $1,2$; (c)

10. Найдите значение выражения $2 - \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x$, если $\sin x = 0,2$.

(a) $1,26$; (b) $1,96$; (c)

11. Найдите значение выражения $3 + 2\operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x$, если $\sin x = 0,3$.

(a) $3,18$; (b) $3,6$; (c)

12. Вычислите $\frac{6\sin 15^\circ \cos 15^\circ}{2\cos^2 15^\circ - 1}$.

(a) $3\sqrt{3}$; (b) 3; (c) $1,5$

13. Вычислите $\frac{\cos^2 22,5^\circ - \sin^2 22,5^\circ}{\cos 25^\circ \cos 20^\circ - \sin 25^\circ \sin 20^\circ}$.

(a) 1; (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

14. Найдите значение выражения $\sin(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\sin\beta$, если $\alpha = 73^\circ$, $\beta = 28^\circ$.

(a) 1; (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

Home Page
Титульная страница
Содержание
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Страница 25 из 34
Назад
Full Screen
Закрыть
Выход

15. Упростите выражение $1 + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \sin x \cos x$, если $\alpha = 73°$, $\beta = 28°$.

(a) $\sin^2 x$; (b) $1 + \sin^2 x$;

16. Упростите выражение $1 - \frac{\sin 2\alpha \sin \alpha}{2 \cos \alpha}$.

(a) $2\cos^2 \alpha$; (b) $\sin^2 \alpha$;

17. Упростите выражение $\cos^2(\pi - \alpha) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

(a) 1; (b) $2\cos^2 \alpha$; (c)

18. Упростите выражение $\sin 4\alpha \sin 6\alpha + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha \cos 6\alpha$.

(a) 0;
(c) $2\cos 2\alpha$;

19. Упростите выражение $\sin 3,5\alpha \sin 2,5\alpha + \cos \alpha - \cos 3,5\alpha \cos 2,5\alpha$.

(a) $\cos \alpha + \cos 6\alpha$;
(c) $2\cos \alpha$;

4.1.2. Тест с записью краткого ответа

1. Если $\cos(\alpha) = -0,1$, то
$5\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha =$

2. Если $\sin\alpha = -0,2$, то
$2\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha =$

3. Если $\sin\alpha = 0,5$, то
$5\sin(\pi+\alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) =$

4. Если $\cos\alpha = -0,9$, то
$4\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \cos(\pi-\alpha) =$

5. Если $\sin\alpha = \sqrt{\frac{5}{21}}$, и $\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi$, то
$4\sqrt{21}\cos\alpha =$

6. Если $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{3}{19}}$ и $\pi \leqslant \alpha \leqslant \frac{3\pi}{2}$, то
$4\sqrt{19}\sin\alpha =$

7. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) =$

8. $\mathrm{tg}^2(\alpha-\pi) =$

Answers:

5. Повышенный уровень сложности

5.1. Примеры с решениями

Пример 5.1. Если $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$, то $81(\sin^3 x + \cos^3 x) = \ldots$.

Решение. Пусть $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$. Тогда

$$\begin{aligned}(\sin x + \cos x)^2 &= \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin x \cos x, \\ &= 1 + 2\sin x \cos x,\end{aligned}$$

откуда

$$2\sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9},$$

так что $\sin x \cos x = -\frac{4}{9}$. Теперь

$$\begin{aligned}81(\sin^3 x + \cos^3 x) &= 81(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) \\ &= 81 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 - (-\frac{4}{9})\right) \\ &= 81 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{9} \\ &= 39.\end{aligned}$$

Ответ. 39.

Пример 5.2. Вычислить $8\cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$.

Решение.

$$\begin{aligned}
8\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ &= \frac{8\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} \\
&= \frac{4\cdot(2\sin 20^\circ \cos 20^\circ)\cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} \\
&= \frac{4\cdot \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} \\
&= \frac{2\cdot(2\sin 40^\circ \cos 40^\circ)\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} \\
&= \frac{2\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} \\
&= \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} \\
&= \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} \\
&= \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ответ. 1.

Пример 5.3. Если $0 \leqslant x \leqslant \pi$, то $\arccos(-\cos x) = \ldots$.

Решение. Пусть $X = \arccos(-\cos x)$. Тогда $X \in [0,\ \pi]$ и $\cos X = -\cos x = \cos(\pi - x)$. При этом и $\pi - x \in [0,\ \pi]$ (почему?). Таким

образом, оба числа, X и $\pi - x$, принадлежат отрезку $[0,\ \pi]$ и косинусы их равны. Но функция косинус на отрезке $[0,\ \pi]$ каждое своё значение принимает ровно один раз. Значит, $X = \pi - x$, то есть (при указанном условии!) $\arccos(-\cos x) = \pi - x$.

Ответ. $\pi - x$.

Пример 5.4. Если $\cos x = \frac{2}{\sqrt{13}}$ и $-\pi < x < 0$, то $13 \sin 2x = \ldots$.

Решение. В силу формулы синуса двойного аргумента

$$13 \sin 2x = 13 \cdot 2 \sin x \cdot \cos x.$$

Здесь $\cos x$ известен. Найдём $\sin x$.

Из основного тригонометрического тождества, с учётом условия, получаем:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13}.$$

Извлекая из обеих частей этого равенства арифметический квадратный корень, получаем

$$\sqrt{\sin^2 x} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

В силу тождества $\sqrt{a^2} = |a|$ это означает, что

$$|\sin x| = \frac{3}{\sqrt{13}},$$

то есть что

$$\sin x = \frac{3}{\sqrt{13}} \text{ или } \sin x = -\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

При этом $-\pi < x < 0$. Значит, $\sin x < 0$, то есть имеет место второе равенство: $\sin x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$. Таким образом,

$$13 \sin 2x = 13 \cdot 2 \cdot \frac{2}{13} \cdot \left(-\frac{3}{13}\right) = -12.$$

Ответ. -12.

5.2. Тесты с записью краткого ответа

1. Если $\cos x = -\frac{3}{5}$ и $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, то
$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) =$

2. Если $\sin x = \frac{4}{\sqrt{19}}$ и $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, то
$\sqrt{19}\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) =$

3. Если $\sin x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ и $-\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{2}$, то
$26\sin 2x =$

4. Если $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ и $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, то
$17\sin 2x =$

5. $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

6. $\operatorname{tg}^2\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) =$

7. $\frac{4}{3}\operatorname{tg}\left(\pi - \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right) =$

8. $5\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{7}\right)\right) =$

Answers:

Home Page
Титульная страница
Содержание
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Страница 33 из 34
Назад
Full Screen
Закрыть
Выход

1. Упростите выражение $2009 + \sin^4 x - \cos^4 x + \cos 2x$

2. Упростите выражение $4\sin^2 x + 16\sin^4 x - 16\sin^2 x$

3. Упростите выражение $3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 3(\sin^6 x + \cos^6 x)$

4. Если $2\cos 2x + 9\sin x - 4 = 0$, то
$8\cos 2x =$

5. Если $3\cos 2x + 11\sin x - 7 = 0$, то
$\cos 2x =$

6. Если $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$, то
$27\sin x \cos x =$

7. Если $\operatorname{tg} x = 3$, то
$\frac{2\sin 2x - 3\cos 2x}{4\sin 2x + 5\cos 2x} =$

8. $16\operatorname{ctg} 110^\circ \sin 105^\circ \operatorname{tg} 70^\circ \cos 105^\circ =$

9. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ =$

Answers: